ثانوية الليمون - ملخص لدروس الامتحان الجهوي مع الأمثلة

I - درس التناسبية :

قاعدة 1 : إذا كان A جزءاً من B
فإن النسبة المئوية التي يمثلها A
من B هي العدد :

$$P = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } B} \times 100$$

ونرمز له بالرمز : $p\%$

مثال 1 : اشترى بائع هواتف 80 هاتفا مستعملا. فوجد 5 هواتف لا تشتغل.
احسب النسبة المئوية للهواتف المعطوبة

الحل : نطبق القاعدة :

$$\frac{\text{الهواتف المعطوبة}}{\text{العدد الكلي للهواتف}} \times 100 = \frac{5}{80} \times 100$$

$$= \frac{50}{8} = 12,5\ \%$$

مثال 2 : قمنا بدعوة لحضور حفلة تتويج. أحسب عدد الحاضرين للحفل علما أن عدد المدعويين 30 ونسبة الحضور هي 70% .

الحل : نعلم أن :

$$\frac{\text{عدد الحاضرين}}{\text{العدد الكلي}} \times 100 = 70$$

اذن :

$$\frac{\text{عدد الحاضرين}}{30} \times 100 = 70$$

عدد الحاضرين هو :

$$\frac{70 \times 30}{100} = 7 \times 3 = 21$$

قاعدة 2 : تغيرت القيمة x بنسبة $p\%$
لتكن y هي القيمة الجديدة
لدينا :

. في حالة الزيادة : $y = \left(1 + \frac{P}{100}\right) \times x$

. في حالة النقصان : $y = \left(1 - \frac{P}{100}\right) \times x$

مثال 1 : اشترى بقال بضاعة ثم باعها بمبلغ قدره 4540 درهما محققا بذلك ربحا نسبته 12% .
ماهو ثمن شراء هذه البضاعة؟

الحل : بما أن البقال قد ربح اذن هناك زيادة. اذن نطبق قاعدة الزيادة :

$y = 4540$ (الثمن الجديد) حيث $y = \left(1 + \frac{P}{100}\right) x$

ومنه :

$$4540 = \left(1 + \frac{12}{100}\right) \times x$$

$$\Leftrightarrow 4540 = \frac{100+12}{100} \times x$$

$$\Leftrightarrow 4540 = \frac{112}{100} \times x \Leftrightarrow \frac{4540 \times 100}{112} = x$$

إذن : $x = 4053,57$ DH

مثال 2 : أراد أحمد شراء حاسوب ثمنه 4000 درهم. بعد مفاوضة البائع، استفاد من تخفيض نسبته 9% . كم سيدفع أحمد لقاء هذا الحاسوب؟

نطبق قاعدة النقصان لأن الثمن القديم 4000 انخفض اذن : $y = \left(1 - \frac{9}{100}\right) \times x$

حيث $x = 4000$ نجد :

$$y = \left(\frac{100}{100} - \frac{9}{100}\right) \times 4000 = \frac{91}{100} \times 4000$$

$$y = 91 \times 40 = 3640 \text{ DH}$$

مثال 3 : توقف عداء بعد أن قطع 70% من مسافة السباق حيث لم يتبقى له إلا 90 مترا على خط النهاية. ماهي المسافة الكلية للسباق؟

الحل : نطبق القاعدة 1 لأن هناك مسافة كلية ومسافة جزئية. ليكن x المسافة التي قطعها العداء. اذن $x+90$ هي المسافة الكلية للسباق. اذن :

$$\frac{x}{x+90} \times 100 = 70$$

$$\Leftrightarrow 100x = 70 \times (x + 90)$$

$$\Leftrightarrow 100x = 70x + 6300$$

$\Leftrightarrow \quad 30x = 6300$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6300}{30} = 210$

اذن المسافة الكلية للسباق هي، $x+90 = 300$ متر

II - المعادلات والمتراجحات:

التعبير: $P(x) = ax^2+bx+c$

يسمى ثلاثية حدود، حيث a وb وc أعداد معلومة.

مثال: $-5x^2+x+12$

$a=-5$ و $b=1$ و $c=12$

قاعدة 1: لحل المعادلة $ax^2+bx+c=0$

نبدأ بحساب العدد: $\Delta = b^2-4ac$

اذا كان $\Delta > 0$ فإن مجموعة الحلول هي $S=\{x_1 ; x_2\}$

حيث: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين:

أ- $-x^2+x+2=0$

ب- $3x^2-5x+2=0$

أ- نعتبر المعادلة $-x^2+x+2=0$

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4(-1)\times 2$

$= 1+8 = 9 > 0$

حلاها هما:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = 2$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = -1$

اذن $S = \{-1 ; 2\}$

ب- المعادلة $3x^2-5x+2=0$

$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(3)(2)$

$= 25-24 = 1 > 0$

حلاها هما:

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 3} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

اذن $S = \{\frac{2}{3} ; 1\}$

قاعدة 2: تعميل ثلاثية الحدود:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

مثال 2: عمل ثلاثيتي الحدود:

أ- $-x^2+x+2$

ب- $3x^2-5x+2$

الحل. أ) نعمل $-x^2+x+2$

نطبق القاعدة:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

اذن: $-x^2+x+2 = -(x-x_1)(x-x_2)$

حيث $x_1=2$ و $x_2=-1$ (أنظر مثال 1)

اذن: $-x^2+x+2 = -(x-2)(x+1)$

ب- نعمل $3x^2-5x+2$

لدينا حسب المثال 1: $x_1 = \frac{2}{3}$ و $x_2 = 1$

اذن $3x^2-5x+2 = 3(x-x_1)(x-x_2)$

$= 3(x-\frac{2}{3})(x-1)$

قاعدة 3 إشارة ثلاثية الحدود.

جدول الاشارة:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		إشارة a	0	عكس إشارة a	0	إشارة a	

في حالة كان $x_1 < x_2$.

مثال 3: إشارة $-x^2+x+2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إشارة -1 عكس إشارة -1

نعتبر $3x^2-5x+2$، جدول الاشارة:

x		$2/3$		1	
$3x^2-5x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$

• تطبيق : حل متراجحة في $\mathbb{R}$:

لحل متراجحة نستعمل جدول الاشارة :

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

أ- $5x^2-4x-1 \leq 0$

ب- $5x^2-4x-1 < 0$

ج- $5x^2-4x-1 \geq 0$

الحل : لوضع جدول الاشارة نبدأ بحساب x_1 و x_2 . لدينا : $5x^2-4x-1$

$$\Delta = (-4)^2-4(5)(-1)$$
$$= 16+20 = 36 > 0$$

اذن :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-6}{10} = \boxed{\frac{-1}{5}}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+6}{10} = \boxed{1}$$

و $x_1 < x_2$ إذن جدول الإشارة :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2-4x-1$		+ اشارة 5	0	− عكس اشارة 5	0	+ نفس اشارة 5	

اذن التعبير $5x^2-4x-1$ موجب على مجالين وسالب على مجال .

أ- حل المتراجحة $5x^2-4x-1 \leq 0$ هو المجال : $[-\frac{1}{5} ; 1]$

ب- حل المتراجحة $5x^2-4x-1 < 0$ هو : $]-\frac{1}{5} ; 1[$

ج- حل المتراجحة $5x^2-4x-1 \geq 0$ هو : $]-\infty ; -\frac{1}{5}] \cup [1 ; +\infty[$

II - النظمات في $\mathbb{R}^2$:

مثال 1 : حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x-y=22 \end{cases}$$

الحل : حساب المحددة

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)-(4)(2)$$
$$= -1-8 = -9$$

بما أن $-9 \neq 0$ فإن النظمة تقبل حلا وحيدا $(x;y)$. حيث : $y=\frac{D_y}{D}$ و $x=\frac{D_x}{D}$

لدينا :

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 22 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)-(22)(2)$$
$$= -1-44 = -45$$

اذن : $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-45}{-9} = \frac{45}{9} = \boxed{5}$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = (1)(22)-(4)(1)$$
$$= 22-4 = 18$$

اذن : $y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{-9} = -\frac{18}{9} = \boxed{-2}$

حل النظمة هو :

$$S = \{(5 ; -2)\}$$

مثال 2 [امتحان جهوي]

اشترى تلميذ 8 كتب من صنفين مختلفين بثمن اجمالي قدره 105 درهم . حدد عدد الكتب من كل صنف اذا علمت أن ثمن الكتاب الواحد من الصنف الأول هو 10 دراهم وأن ثمن الكتاب الواحد من الصنف الثاني هو 15 درهما .

الحل : ليكن x عدد الكتب من الصنف الأول .
y " " " " الثاني .

عدد ما اشتراه من الصنف الأول نضيف إليه عدد ما اشتراه من الصنف الثاني يعطينا العدد الكلي للمشتريات من الصنفين معا يعني : $x+y=8$ ولدينا : $10x+15y=105$

نستنتج النظمة :

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 10x+15y=105 \end{cases}$$

يمكن الاختزال بالقسمة على 5 في المعادلة 2 فنجد :

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$$

حساب المحددات :

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{1}$; $D_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 21 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{3}$ و $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 21 \end{vmatrix} = \boxed{5}$

اذن : $x = \frac{D_x}{D} = 3$ و $y = \frac{D_y}{D} = 5$

ومنه $\boxed{y=5 \text{ و } x=3}$